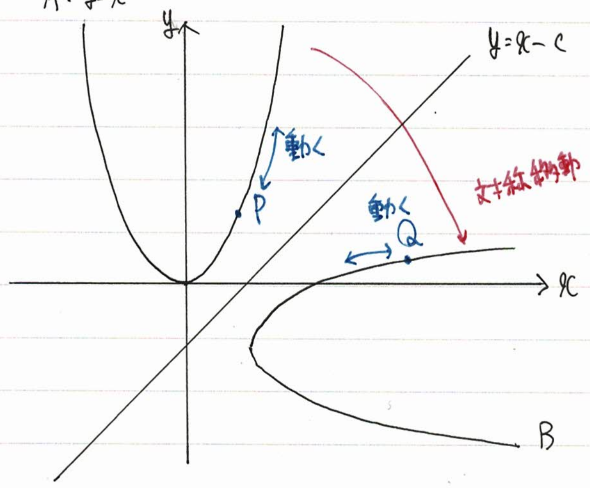
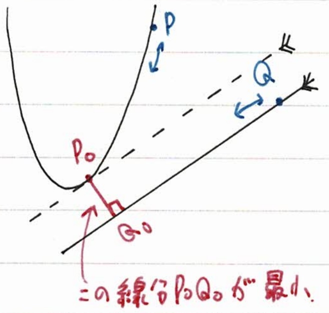
1999年　東大数学　文系第3問

A: $y=x^2$



補 有名例題
放物線と直線の上の動点の場合。



左図のように、直線と平行な接線との接点が、線分PQを最小とするPの場所P_0で、P_0から直線に下ろした垂線の足が線分PQを最小にするQの場所Q_0

今回の問題は、上の補を2つ合わせた図。
よって、今回も、P_0の位置は同じだろうと予想。
でも、これを記述するのが難しい問題。

まずは、A: $y=x^2$ と l: $y=x-c$ の位置関係を示す。

$x^2-(x-c) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + c > 0$ なので

$y=x^2$ は $y=x-c$ より上側にある。

次に、2つの放物線に、傾き1の接線を引く。

A: $y=x^2$ に、傾き1の接線を引くと。

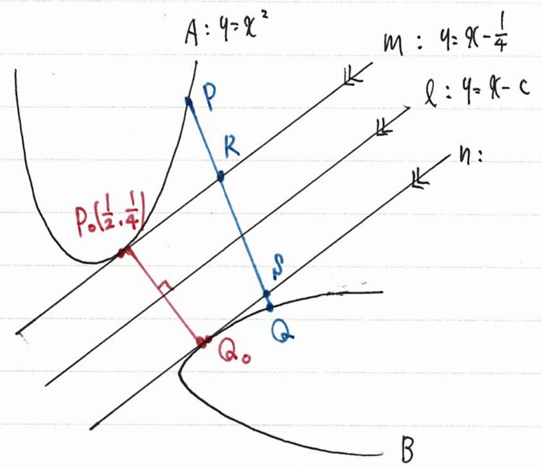
$y'=2x$ から　$2x=1$　$x=\frac{1}{2}$ より

$y-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\times\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ y = x-\frac{1}{4}$　　また、接点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ であり、

これを点P_0とする。

Bにも傾き1の接線を引いた図を描くと。



上図のように3直線をl, m, nとし、nとBの接点をQ_0とする。
放物線AとBはlに関して対称なので、
点P_0と点Q_0も線対称である。
よって $P_0Q_0 \perp l$ であるから、　距離では最短。
線分P_0Q_0は、直線m, nの距離（m, n上の2点が結ぶ最短距離）である。

すると、上図から　$PQ \geqq RS$　であり
P_0Q_0は直線m, nの距離だから　$RS \geqq P_0Q_0$　なので、

$PQ \geqq RS \geqq P_0Q_0$

P_0Q_0は、実際に存在する点なのは図からわかるので、等号成立条件は不要。

以上から、P_0Q_0がPQの最短距離である。

P_0とlの距離は、$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と $x-y-c=0$ の距離なので

$$\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-c\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$ である。

P_0Q_0はこれの2倍なので、求める距離は、

$$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(c-\frac{1}{4}\right) = \sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$